

## Série d'exercices (Suites réelles)

## Exercice 1 :

- 1) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $n! \geq 2^{n-1}$ .
- 2) On considère la suite  $U$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ .
  - a) Montrer que  $U$  est majorée par 3.
  - b) Montrer que  $U$  est croissante. En déduire qu'elle converge.
- 3) On pose pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $V_n = U_n + \frac{1}{n(n!)}$ .
  - a) Montrer que  $V$  est décroissante.
  - b) Montrer que  $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$  on a :  $U_p \leq V_q$ .
  - c) En déduire que  $V$  converge.
  - d) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ .

## Exercice 2 :

Soit la suite  $U$  définie par :  $U_0 = 2$  et pour tout entier  $n$ ,  $U_{n+1} = \frac{1}{2} \left( U_n + \frac{1}{U_n} \right)$ .

- 1) Montrer que pour tout entier  $n$ , on a :  $U_n \geq 1$ .
- 2) Montrer que  $U$  est décroissante. En déduire que  $U$  converge.
- 3) Soit la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$ .
  - a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $V_{n+1} = V_n^2$ .
  - b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $0 < V_n < \left(\frac{1}{3}\right)^n$ . En déduire la limite de  $V$  et celle de  $U$ .
- 4) Soit la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $W_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{V_k}$ . Calculer la limite de  $W$ .
- 5) Montrer par récurrence que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}$ . En déduire  $U_n$  en fonction de  $n$ .
- 6) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $T_n = V_0 V_1 \dots V_n$ . Exprimer  $T_n$  en fonction de  $n$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$ .

## Exercice 3 :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{x+8}{2x+1}$ . On pose  $g = f \circ f$ .

- 1) Etudier les variations de  $f$  et tracer sa courbe  $\mathcal{C}$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
- 2) Calculer  $g(x)$  pour  $x \geq 0$ . Prouver que  $g$  est croissante.
- 3) On définit la suite  $U$  par :  $U_0 = 1$  et pour tout  $n$ ,  $U_{n+1} = f(U_n)$ . On pose  $V_p = U_{2p}$  et  $W_p = U_{2p+1}$ .
  - a) Construire sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de  $U$ .
  - b) Montrer que  $\forall p \in \mathbb{N} : V_p < 2 < W_p$ .
  - c) Etudier la monotonie de  $V$  et  $W$ . En déduire qu'elles convergent.
- 4) Soit la suite  $T$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $T_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 2}$ .
  - a) Montrer que  $T$  est une suite géométrique.
  - b) Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$  et calculer sa limite.